

## Wiederholungsaufgaben 12. Klasse

1.0 Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph  $G_f$  einer ganzrationalen Funktion  $f$  dritten Grades mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$  besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle  $x = -2$ . (Abitur 2019 Teil 1)

1.1 Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von  $f$  einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f(x)$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow \infty$  an.

1.2 Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen  $G_{f'}$  der ersten Ableitungsfunktion  $f'$  mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion  $f'$ , die Lage des Extrempunktes und das Symmetrieverhalten des Graphen  $G_{f'}$  an.

2.0 Für eine ganzrationale Funktion  $f$  dritten Grades mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$  gelten folgende Gleichungen:

I.  $f(0) = 0$       II.  $f'(0) = 0$   
III.  $f(-3) = -3$     IV.  $f'(-3) = -1$

Der zugehörige Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet.

(Abitur 2019 Teil 2 AI)

2.1 Beschreiben Sie in Worten, welche Eigenschaften der Graph von  $f$  aufgrund obiger Gleichungen hat.

2.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von  $f$ .

(Mögliches Teilergebnis:  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$ )

2.3.0 Im Folgenden wird die Funktion  $g$  mit  $g(x) = f(x)$  und der im Vergleich zu  $D_f$  eingeschränkten Definitionsmenge  $D_g = [-4, 5; 1]$  betrachtet. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_g$  bezeichnet.

2.3.1 Ermitteln Sie die Wertemenge  $W_g$  der Funktion  $g$ . Bestimmen Sie dazu die Koordinaten sämtlicher Extrempunkte.

2.3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion  $g$ .

2.3.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen  $G_g$  in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. Ermitteln Sie dazu die Nullstellen der Funktion  $g$ . Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

3.0 Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion  $w$  mit der Funktionsgleichung  $w(t) = at^4 + bt^3 + c$  mit geeigneten Werten  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und der Definitionsmenge  $D_w = [0; 30]$  beschrieben werden.

Dabei bedeutet die Variable  $t$  die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$ .

Der Funktionswert  $w(t)$  gibt den Wasserstand des Flusses in cm an.

Zu Monatsbeginn lag der Wasserstand bei 200 cm und am Monatsende bei 308 cm.

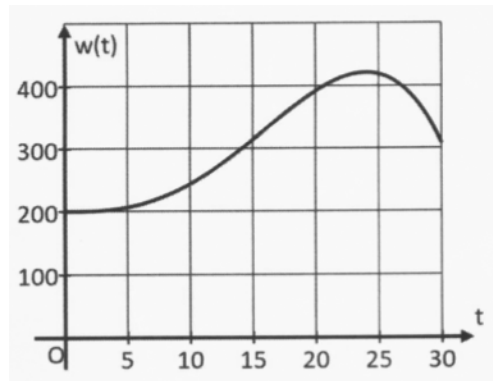
Der höchste Wasserstand wurde am 25. März – also zum Zeitpunkt  $t_{\max} = 24$  - gemessen.

Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand  $w(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.

(Abitur 2019 Teil 2 All)



3.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  und damit die zugehörige Funktionsgleichung von  $w$ .

(mögliches Ergebnis:  $w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100000)$ )

3.2 Berechnen Sie den höchsten Pegel im Beobachtungszeitraum zentimetergenau.

3.3 Ermitteln Sie rechnerisch das Datum im Beobachtungszeitraum, an dem die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten war.

4.0 Gegeben ist die Funktion  $g: x \mapsto x^3 + 3x^2$  mit der Definitionsmenge  $D_g = \mathbb{R}$ .

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_g$  bezeichnet.  
(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

4.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen  $G_g$  mit der x-Achse.

4.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente des Graphen  $G_g$ .

5.0 Gegeben ist die Funktion  $g: x \mapsto e^{0,25x} - e^{-0,25x}$  mit der Definitionsmenge  $D_g = \mathbb{R}$ .

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_g$  bezeichnet.  
(Abitur 2019 Teil 1)

5.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion  $g$  zum Koordinatensystem und geben Sie  $\int_{-2}^2 g(x) dx$  an.

5.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $g$  an der Stelle  $x = 0$ .

6.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto x^2 \cdot e^{-x}$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ .  
(Abitur 2019 Teil 2 All)

6.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion  $f$  an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f(x)$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow \infty$ .

6.2 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion  $f$  streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt, und damit die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von  $f$ .

6.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $f$  unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich  $-1 \leq x \leq 6$  in ein geeignetes Koordinatensystem.  
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

7.0 Zur Unterstützung von Gärprozessen, z.B. bei der Herstellung von Lebensmitteln, werden Hefen benötigt. Die Hefezellen wachsen in Behältern mit Nährlösung. Bei einer bestimmten Hefekultur verdoppelt sich die Anzahl der Hefezellen im Durchschnitt stündlich. Zu Beginn des Wachstumsprozesses wird Hefe mit der Masse 0,5 g in den Behälter eingebracht.

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

7.1 Stellen Sie eine Wertetabelle auf, in der Sie die Hefemassen nach 0, 1, 2, 3 und 4 Stunden eintragen.

7.2 Geben Sie einen Funktionsterm  $H(t)$  an, der die Abhängigkeit der Hefemasse in Gramm von der Zeit  $t$  in Stunden beschreibt.

8 Gegeben ist die Funktion  $k: x \mapsto e^x - 1$  mit der Definitionsmenge  $D_k = \mathbb{R}$ .

Bestimmen Sie die Nullstelle von  $k$  und begründen Sie, dass  $k$  die Wertemenge

$W_k = ]-1; \infty[$  hat. (Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

9.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto 2(x-2)^2 \cdot e^{-0,5x}$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ .

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet.

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)

9.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen  $G_f$  mit den Koordinatenachsen und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow \infty$ .

9.2 Berechnen Sie jeweils die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen  $G_f$ . Runden Sie die  $y$ -Werte gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

(Mögliches Teilergebnis:  $f'(x) = -(x^2 - 8x + 12) \cdot e^{-0,5x}$ )

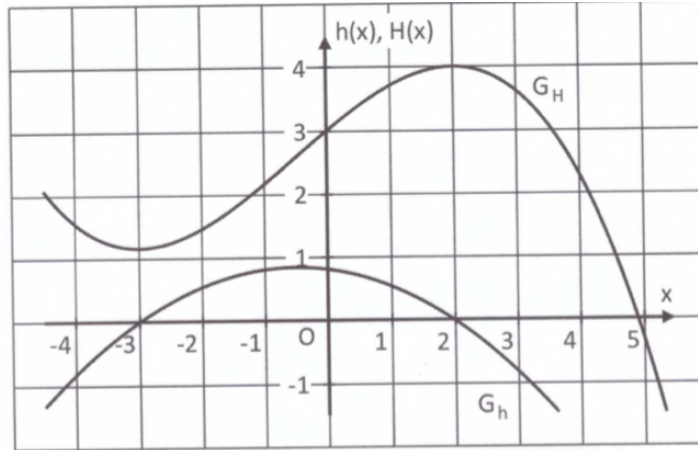
9.3 Zeichnen Sie den Graphen  $G_f$  im Bereich  $0 \leq x \leq 12$  mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.

(Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm)

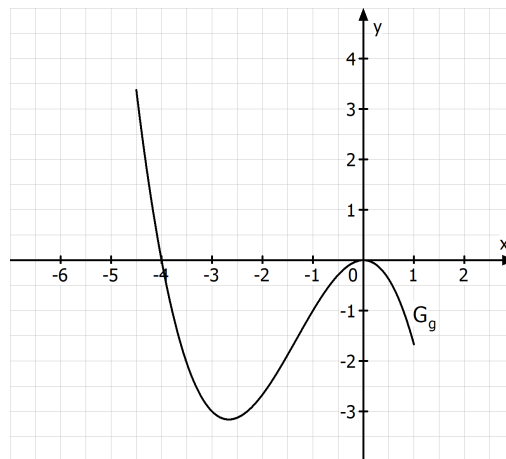
Begründen Sie mithilfe des Verlaufs von  $G_f$ , ohne weitere Rechnung, in welchen der angegebenen Intervalle sich jeweils eine Wendestelle befindet.

$I_1 = ]0; 2[$ ;  $I_2 = ]2; 6[$ ;  $I_3 = ]6; 12[$

- 10 In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen der Funktion  $h$  und der entsprechende Ausschnitt des Graphen einer Stammfunktion  $H$  von  $h$  dargestellt. Entnehmen Sie der Abbildung den Wert der Differenz  $H(2) - H(0)$  und interpretieren Sie diesen Wert bezüglich des Graphen von  $h$  geometrisch. (Abitur 2019 Teil 1)



- 11 Der Graph der Funktion  $g$  mit  $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$  mit  $D_g = [-4, 5; 1]$  und die  $x$ -Achse schließen im III. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. (Abitur 2019 Teil 2 AI)



- 12 Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion  $w$  mit der Funktionsgleichung

$$w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100000)$$

mit der Definitionsmenge  $D_w = [0; 30]$  beschrieben werden.

Dabei bedeutet die Variable  $t$  die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$ .

Der Funktionswert  $w(t)$  gibt den Wasserstand des Flusses in cm an.

Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand  $w(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

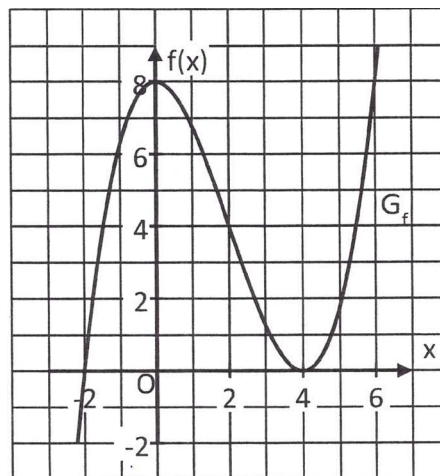
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.

(Abitur 2019 Teil 2 All)

Berechnen Sie  $\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} w(t) dt$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

- 13 Untenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen  $G_f$  einer ganzrationalen Funktion  $f$ . Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind.  
(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)



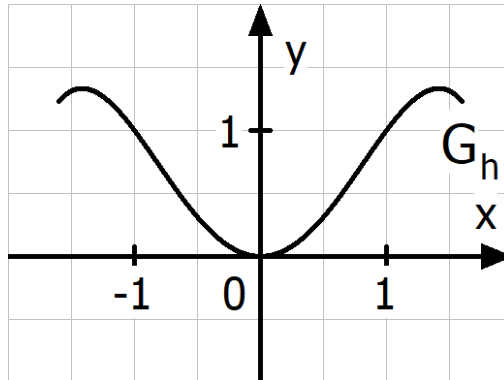
- A. Der Graph  $G_{f'}$  der Ableitungsfunktion von  $f$  hat an der Stelle  $x = 4$  einen Extrempunkt.
- B. Für  $0 < x < 4$  gilt  $f'(x) < 0$ .
- C. Der Graph  $G_f$  einer Stammfunktion von  $f$  ist im Intervall  $[-1; 2]$  echt monoton steigend.
- D. Der Graph  $G_f$  einer Stammfunktion von  $f$  hat bei  $x = 0$  einen Wendepunkt.

14.0 Der Querschnitt einer Designer-Dachrinne wird durch den Graphen der Funktion

$$h: x \mapsto -\frac{1}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^2 \text{ mit der Definitionsmenge } D_h = [-1,6; 1,6] \text{ beschrieben (siehe$$

Skizze).  $x$  und  $y$  sind Längenangaben in der Einheit dm. Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)



14.1 Berechnen Sie, bis zu welcher maximalen Höhe  $h_{\max}$  bezüglich des tiefsten Punktes der Dachrinne diese gefüllt werden kann, bevor sie überläuft.

14.2 Ermitteln Sie, welche Querschnittsfläche in  $\text{dm}^2$  das Wasser ausfüllt, wenn es 1 dm hoch in der Dachrinne steht. Entnehmen Sie dazu geeignete ganzzahlige Werte aus der Zeichnung. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

15.0 Der Verlauf der Anzahl der Neuerkrankungen für eine bestimmte Grippewelle in einer gewissen Region in Abhängigkeit von der Zeit kann vereinfacht durch die Funktion  $N$  mit der Funktionsgleichung  $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0,5t}$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  beschrieben werden.

Dabei bedeutet die Variable  $t$  die Zeit in Wochen ab Beginn der Grippewelle zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$ . Der Funktionswert  $N(t)$  gibt die Anzahl der an Grippe neu erkrankten Menschen in Tausend an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2019 Teil 2 AI)

15.1 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt  $t_{\max}$  die Zahl der neu erkrankten Menschen ihr Maximum annimmt und berechnen Sie diese maximale Anzahl.

$$\text{(Teilergebnis: } \dot{N}(t) = (4t - t^2) \cdot e^{-0,5t} \text{)}$$

15.2 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte  $N(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

15.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion  $N$  im Bereich  $0 \leq t \leq 10$  in ein geeignetes beschriftetes Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

15.4 Gegeben ist die Funktion  $G: t \mapsto (-4t^2 - 16t - 32) \cdot e^{-0,5t}$  mit der Definitionsmenge

$D_G = \mathbb{R}_0^+$ . Zeigen Sie, dass die Funktion  $G$  eine mögliche Stammfunktion von  $N$  ist.

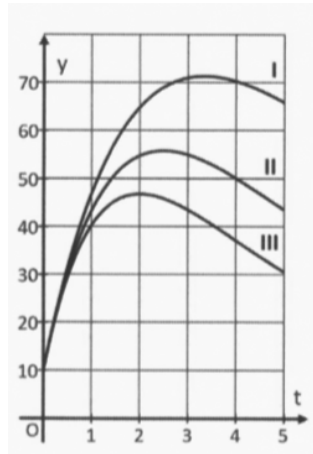
Berechnen Sie damit die durchschnittliche Anzahl an neu erkrankten Menschen während der ersten acht Wochen ab Beginn der Grippewelle.

16.0 Der Bestand einer Bakterienkultur, der kontinuierlich Gift zugeführt wird, kann in den ersten fünf Stunden näherungsweise durch eine Funktion des folgenden Typs

beschrieben werden:  $k: t \mapsto 50t \cdot e^{-at} + 10$  mit  $t \in [0; 5]$ .

Dabei gibt  $t$  die seit Beginn der Giftzugabe zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  vergangene Zeit in Stunden an. Der Funktionswert  $k(t)$  gibt die Anzahl der Bakterien in Tausend an. Je nach Wirksamkeit des Gifts ist  $a$  eine dem Gift entsprechende positive reelle Zahl. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Untenstehende Abbildung zeigt drei Ausschnitte von Graphen der Funktion  $k$  für verschiedene Werte für  $a$ . (Abitur 2019 Teil 2 All)



Graph I gilt für  $a_1 = 0,3$  mit  $k_I(t) = 50t \cdot e^{-0,3t} + 10$

Graph II gilt für  $0,3 < a_2 < 0,5$  mit  $k_{II}(t) = 50t \cdot e^{-a_2 t} + 10$

Graph III gilt für  $a_3 = 0,5$  mit  $k_{III}(t) = 50t \cdot e^{-0,5t} + 10$

16.1 Berechnen Sie für  $t_1 = 0$  und  $t_2 = 2$  den Quotienten  $\frac{k_{III}(t_2) - k_{III}(t_1)}{t_2 - t_1}$  und interpretieren Sie

das Ergebnis im Sachzusammenhang.

16.2 Überprüfen Sie bei der Funktion  $k_{III}$  rechnerisch, ob vier Stunden nach Beginn der Giftzugabe die momentane Abnahmerate der Anzahl der Bakterien ca. 113 Bakterien pro Minute beträgt.



16.3 Entnehmen Sie der Abbildung ein geeignetes Wertepaar von Graph II und berechnen Sie damit den Wert  $a_2$  für den Funktionsterm  $k_{II}(t)$ . Folgern Sie aus den Angaben und dem berechneten Wert für  $a_2$ , wie die Größe von  $a$  mit der Wirksamkeit des Gifts zusammenhängt.

17.0 Der Tierpark Affenhaus öffnet jeden Tag um 10 Uhr und schließt um 18 Uhr. Die Besucherzahlen des Tierparks in Tausend können laut einem Modell

näherungsweise durch die Funktion  $N$  mit der Funktionsgleichung  $N(t) = \frac{1}{4}(8t - t^2)e^{0,4t-1}$

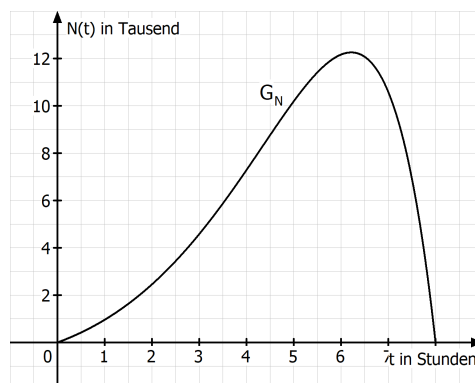
mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  beschrieben werden. Dabei gibt  $t$  die vergangene Zeit in Stunden seit Öffnung des Tierparks an einem bestimmten Tag an (Zeitpunkt der Öffnung des Tierparks:  $t_0 = 0$ ).

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)

17.1 Der Betreiber des Tierparks möchte die Korrektheit dieses Modells überprüfen. Dazu wird unter anderem um 12 Uhr die tatsächliche Anzahl der Besucher im Tierpark bestimmt. Wenn dieser Wert innerhalb einer Abweichung von 10 % um den mit dem Modell errechneten Wert liegt, wird das Modell punktuell als korrekt angesehen. Bestimmen Sie das Intervall, in dem die tatsächliche Besucherzahl um 12 Uhr liegen muss, damit die Prüfung zu dieser Uhrzeit positiv ausfällt.

17.2.0 Im Folgenden wird das Modell als korrekt betrachtet.

In der Abbildung sehen Sie den Verlauf der Besucherzahlen nach dem Modell über die Zeit nach der Öffnung des Tierparks graphisch dargestellt.

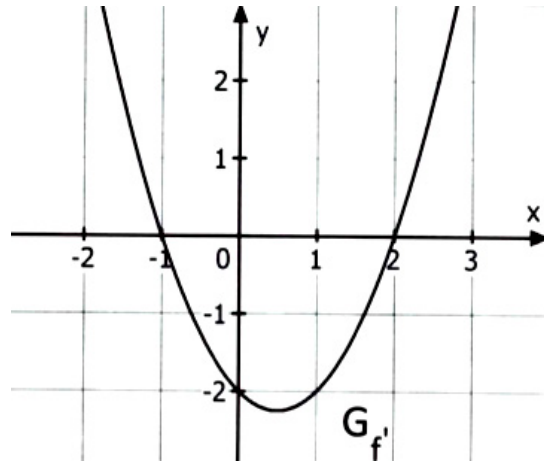


17.2.1 Das Betreiben der Eisdiele „Pinguin“ ist nur rentabel, wenn sich mindestens 4000 Personen im Tierpark befinden. Ermitteln Sie anhand der Abbildung näherungsweise die Tageszeiten, zu denen die Eisdiele rentabel ist.

17.2.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt nach der Öffnung des Tierparks, an dem sich die meisten Besucher im Zoo befinden und berechnen Sie diese höchste Anzahl.

(Mögliches Teilergebnis:  $\dot{N}(t) = \frac{1}{10}(-t^2 + 3t + 20) \cdot e^{0,4t-1}$ )

18.0 In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise eine Parabel. Diese ist der Graph der Ableitungsfunktion  $f'$  der Funktion  $f$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ .  
 (Abitur 2020 Teil 1)



18.1 Leiten Sie nachvollziehbar aus dem Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  die Lage und Art der lokalen Extremstellen von  $f$  ab. Begründen Sie, weshalb die relativen Extrempunkte des Graphen von  $f$  nicht absolut sein können.

18.2 Bestimmen Sie anhand des Graphen  $G_{f'}$  die Lage der Wendestellen von  $f$  und entscheiden Sie begründet, ob die Wendetangente des Graphen der Funktion  $f$  steigt oder fällt.

19  $h$  sei eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit der Definitionsmenge  $D_h = \mathbb{R}$ . Für die zugehörige erste Ableitungsfunktion gilt die Funktionsgleichung  $h'(x) = x^2 + 1$ . Skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $h'$  und begründen Sie damit, dass der Graph der Funktion  $h$  genau eine Nullstelle besitzt. Geben Sie außerdem einen möglichen Funktionsterm für  $h$  an. (Abitur 2020 Teil 1)

20 Eine ganzrationale Funktion  $g$  habe höchstens den Grad fünf. Die Tabelle zeigt das Krümmungsverhalten des Graphen  $G_g$ .

$x \in$	$]-\infty; 1]$	$[1; 4]$	$[4; \infty[$
$G_g$	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

Geben Sie die Wendestellen der Funktion  $g$  an und argumentieren Sie, welchen Grad  $g$  nur haben kann. (Abitur 2020 Teil 1)

21 Im Folgenden sind zwei Gleichungen gegeben. Lösen Sie die erste und zeigen Sie die Unlösbarkeit der zweiten. (Abitur 2020 Teil 1)

$$2x^4 - 18x^2 = 0$$

$$e^{x+1} + e^{x-1} = 0$$

22.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto (2x^2 - 4) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 - 1}$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ .

Der Graph von  $f$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet.

(Abitur 2020 Teil 2 AI)

22.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen  $G_f$  bezüglich des Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von  $f$  für  $|x| \rightarrow \infty$ .

22.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von  $G_f$  und geben Sie die Wertemenge  $W_f$  der Funktion  $f$  an.

(Teilergebnis:  $f'(x) = (8x - 2x^3) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ )

22.3 Stellen Sie die Gleichung der Tangente an  $G_f$  an der Stelle  $x = 1$  in allgemeiner Form auf.

22.4 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$  und zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von  $f$  für  $-3 \leq x \leq 3$  in ein kartesisches Koordinatensystem.

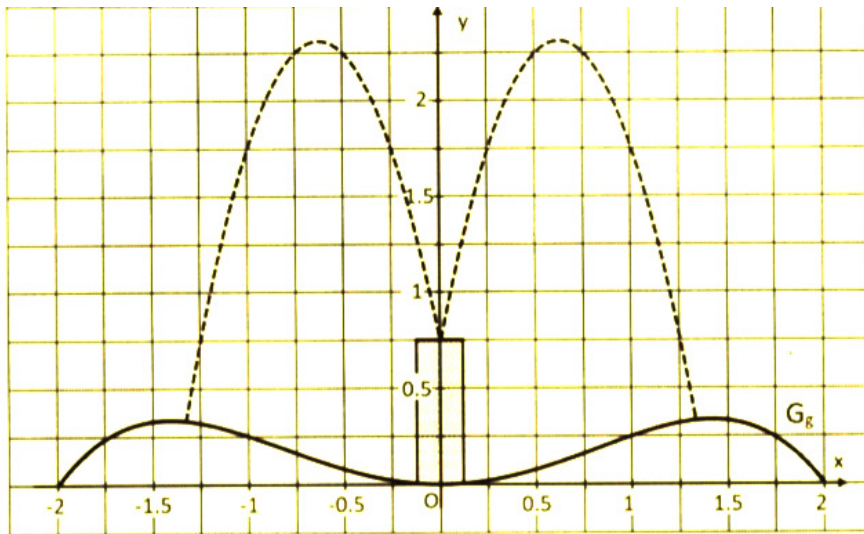
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 2 cm

22.5 Der Graph der Ableitungsfunktion von  $f$  und die  $x$ -Achse schließen im I. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems im Bereich  $0 \leq x \leq 2$  ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks auf zwei Nachkommastellen gerundet.

22.6 Der Graph  $G_f$  und die Koordinatenachsen schließen im IV. Quadranten ein endliches Flächenstück ein.

Schätzen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks geeignet ab.

- 23.0 Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt eines Springbrunnens. Dieser hat eine kreisförmige Grundfläche mit einem Durchmesser von 4 m. Die Oberflächenlinie der im Querschnitt dargestellten Auffangwanne wird durch den Graphen  $G_g$  einer ganzrationalen Funktion  $g$  vierten Grades mit der Definitionsmenge  $D_g = [-2; 2]$  beschrieben. Der Graph  $G_g$  in einem kartesischen Koordinatensystem ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse. Die Koordinaten  $x$  und  $y$  stellen Längenangaben in der Einheit Meter dar. Bei den folgenden Rechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2020 Teil 2 AI)



- 23.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von  $g$ . Entnehmen Sie dazu geeignete Werte aus der Zeichnung.

(Mögliches Teilergebnis:  $g(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^2$ )

- 23.2.0 Die Wasserfontänen treten – wie in obiger Abbildung gestrichelt dargestellt – aus einer in der Mitte befindlichen Säule aus und beschreiben Parabelbahnen. Ihr Verlauf ist abhängig vom Wasserdruck. Im Folgenden wird nur die rechte Wasserfontäne betrachtet. Alle möglichen Wasserstrahlen lassen sich durch die Graphen der Funktionen  $p_a$  mit  $p_a(x) = -ax^2 + 5x + 0,75$  und  $a \in \mathbb{R}^+$  darstellen.

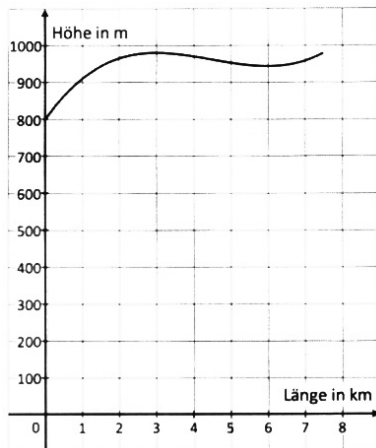
- 23.2.1 Berechnen Sie, für welchen Wert von  $a$  der Strahl im Punkt  $A(1|0,25)$  auf die Auffangwanne trifft.
- 23.2.2 Berechnen Sie, bis zu welcher maximalen Höhe  $h_{\max}$  die Auffangwanne gefüllt werden kann, bevor sie überläuft.

24.0 Ein Teilstück einer Langlaufloipe verläuft von oben betrachtet geradlinig und hat im Querschnitt das abgebildete Profil, welches annähernd durch den Graphen der

$$\text{Funktion } f: x \mapsto 8 \cdot \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100 \right) \text{ mit der Definitionsmenge } D_f = [0; 7,5]$$

beschrieben werden kann.

Die x-Achse gibt die Länge in waagrechter Richtung an, auf der y-Achse ist die Höhe über dem Meeresspiegel aufgetragen. Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Kilometer bzw. Meter dar. (Abitur 2020 Teil 2 All)



24.1 Ermitteln Sie die maximalen Teilintervalle von  $D_f$ , in denen die Loipe auf- bzw. abwärts verläuft.

24.2 Berechnen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe 15.1, in welcher horizontalen Entfernung vom Beginn des Teilstückes der Loipe maximale Höhe erreicht wird. Geben Sie an, in welcher Höhe Sporttreibende sich am höchsten Punkt der Loipe befinden.

24.3 Ermitteln Sie, nach wie vielen Kilometern in horizontaler Entfernung vom Ausgangspunkt die Loipe am steilsten abwärts verläuft.

23.4 Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Loipe in Prozent auf den ersten drei Kilometern.

24.5 Die Steigung der Loipe bei Kilometer 2 tritt im weiteren Verlauf der Loipe noch einmal auf. Berechnen Sie die Stelle, an der dies der Fall ist.

25.0 Gegeben ist die Funktion  $g: x \mapsto 2 - 5e^{-0,1x^2}$  mit der Definitionsmenge  $D_g = \mathbb{R}$ .

Der Graph von  $g$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_g$  bezeichnet.  
(Abitur 2020 Teil 2 AII)

25.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen  $G_g$  bezüglich des Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von  $g$  für  $|x| \rightarrow \infty$ .  
Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen  $G_g$  an.

25.2 Berechnen Sie die Nullstellen von  $g$ . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

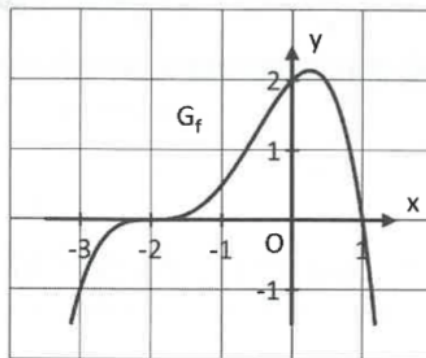
25.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von  $G_g$ .  
Begründen Sie, warum dieser absolut ist und geben Sie die Wertemenge  $W_g$  der Funktion  $g$  an.

25.4 Stellen Sie die Gleichung der Tangente an  $G_g$  an der Stelle  $x = 3$  in allgemeiner Form auf.

25.5 Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von  $G_g$  können auch ohne Verwendung der Ableitungsfunktion bestimmt werden. Begründen Sie dies mithilfe bekannter Ergebnisse.  
Verwenden Sie dabei die Tatsache, dass nur höchstens ein Extrempunkt von  $G_g$  existiert.

25.6 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion  $g$  im Bereich  $-7 \leq x \leq 7$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

26.0 In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion  $f$  vom Grad 4 mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ .  
 (Abitur 2021 Teil 1)



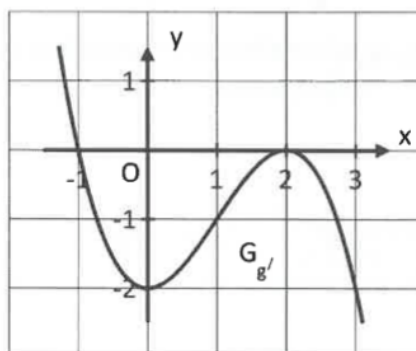
26.1 Geben Sie alle Nullstellen der Funktion  $f$  sowie jeweils deren Vielfachheit an.  
 Bestimmen Sie mithilfe dieser Nullstellen einer Funktionsgleichung der Funktion  $f$ .  
 Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.

26.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen  $G_f$ , ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

- a)  $f'(0) = -\frac{1}{2}$
- b)  $f''(1) < 0$
- c)  $f''(-2) = f'(-2)$
- d)  $W_f = \mathbb{R}$

27.0  $g$  ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge  $D_g = \mathbb{R}$ .

In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen der Ableitungsfunktion  $g'$ .



27.1 Geben Sie die Stellen an, an welchen der Graph der Funktion  $g$  Punkte mit horizontaler Tangente hat und benennen Sie jeweils die Art dieser Graphenpunkte.

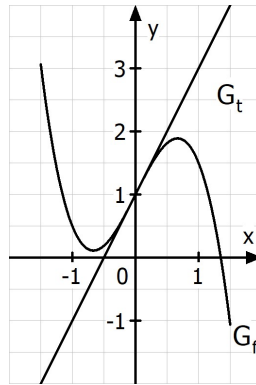
27.2 Geben Sie mit Begründung die Wendestellen der Funktion  $g$  an.

28.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion  $f$  mit  $f: x \mapsto -1,5x^3 + 2x + 1$  mit  $D_f = \mathbb{R}$ .  
(Abitur 2021 AI)

28.1 Bestimmen Sie jeweils Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von  $G_f$  und begründen Sie, warum  $f$  nur eine einfache Nullstelle besitzt.

28.2 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen  $G_f$  und die Wendetangente  $t$  mit  $t(x) = 2x + 1$  mit  $D_t = \mathbb{R}$  im Bereich  $-1,5 \leq x \leq 1,5$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

28.3 Der Graph  $G_f$ , die Tangente  $G_t$  und die Gerade mit der Gleichung  $x = 1$  schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in nachfolgender Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 2021 AI)



29.0 Der zeitliche Verlauf der Temperatur eines in einer großen Tasse eingeschenkten Frühstückstees wird in einem Schülerexperiment untersucht. Als Grundlage wird näherungsweise die Modellfunktion  $T$  mit der Funktionsgleichung  $T(t) = a \cdot e^{bt} + 22$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  und  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  verwendet. Dabei steht die Variable  $t$  für die Beobachtungszeit  $t$  in Minuten ab dem Beginn des Experiments, welches mit dem Eingießen des Tees in die Tasse zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  startet. Der jeweilige Funktionswert von  $T$  gibt die Temperatur des Tees in  $^{\circ}\text{C}$  zum Zeitpunkt  $t$  an. Der Tee in der Tasse hat zu Beginn des Experiments um 8:55 Uhr eine Temperatur von  $80^{\circ}\text{C}$ . Um 9:15 Uhr beträgt die Teetemperatur nur noch  $30^{\circ}\text{C}$ . Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2021 AI)

29.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $b$ . Runden Sie gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. Erläutern Sie, welche Bedeutung der Wert 22 im Funktionsterm der Funktion  $T$  für die Funktionswerte der Modellfunktion hat und bringen Sie diesen Wert in Zusammenhang mit dem durchgeführten Experiment.



Für die folgende Teilaufgabe gilt:  $a = 58$ ;  $b = -0,1$

29.2 Als angenehm wird eine Trinktemperatur von  $54\text{ °C}$  empfunden. Berechnen Sie, um welche Uhrzeit diese Trinktemperatur erreicht wird. Runden Sie die Zeitangabe auf ganze Minuten.

30.0 90% einer Rasenfläche sind vermoost. Das Moos soll mit einem umweltverträglichen Mittel zurückgedrängt werden. Die zeitliche Entwicklung der vom Moos bedeckten Rasenfläche wird näherungsweise mittels der Modellfunktion  $M$  mit der Funktionsgleichung  $M(t) = a \cdot e^{bt}$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  und  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  beschrieben. Dabei steht die Variable  $t$  für die Zeit in Tagen ab dem Zeitpunkt  $t_0 = 0$  der Ausbringung des Mittels. Der jeweilige Funktionswert von  $M$  gibt die gesamte mit Moos bedeckte Fläche in  $\text{m}^2$  zum Zeitpunkt  $t$  an. Bekannt ist, dass zwei Tage nach der Ausbringung des Mittels noch  $400\text{ m}^2$  und nach neun Tagen nur noch  $140\text{ m}^2$  vermoost sind. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2021 AII)

30.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $b$ . Runden Sie  $a$  ganzzahlig und  $b$  auf zwei Nachkommastellen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Rasenfläche.

Für die folgende Teilaufgabe gilt:  $a = 540$ ;  $b = -0,15$

30.2 Der Hersteller des umweltverträglichen Mittels wirbt damit, dass die mit Moos bedeckte Fläche nach der Ausbringung innerhalb einer Woche um ca. 65 % zurückgehen wird. Überprüfen Sie diese Werbeaussage, indem Sie berechnen, nach wie vielen Tagen diese Reduzierung laut dem Modell aus 30.0 erreicht wird. Runden Sie auf ganze Tage.

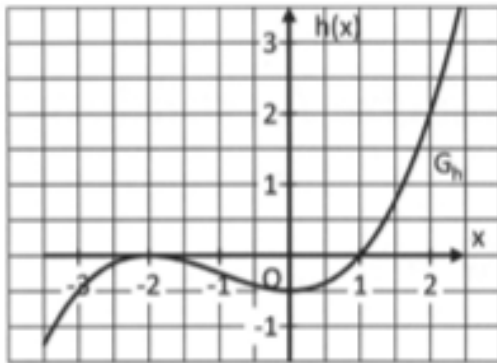
31.0 Gegeben ist die lineare Funktion  $g: x \mapsto 3x - 1$  mit der Definitionsmenge  $D_g = \mathbb{R}$ . Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_g$  bezeichnet. (Abitur 2022 Teil 1)

31.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion  $g$  an und erstellen Sie eine Zeichnung vom Graphen  $G_g$  für  $0 \leq x \leq 2$  in einem kartesischen Koordinatensystem.

31.2 Berechnen Sie  $\int_0^2 g(x) dx$  und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch bezüglich  $G_g$ .

32 Eine nach oben geöffnete Parabel besitzt den Scheitelpunkt  $S(2 | 2k - 1)$  mit  $k \in \mathbb{R}$ . Die zugehörige quadratische Funktion  $p_k: x \mapsto p_k(x)$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Bestimmen Sie alle Werte von  $k$ , sodass die Parabel die  $x$ -Achse genau zweimal schneidet. (Abitur 2022 Teil 1)

- 33 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen  $G_h$  einer ganzrationalen Funktion  $h$  dritten Grades mit der Definitionsmenge  $D_h = \mathbb{R}$ . (Abitur 2022 Teil 1)



Entscheiden Sie anhand des Graphen  $G_h$ , ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. Die Nullstellen und die Extremstellen von  $h$  sind ganzzahlig und können der Abbildung entnommen werden.

- a) Es gilt:  $h'(x) < 0$  für  $x \in ]-2; 1[$
- b) Der Graph der Stammfunktion  $H$  von  $h$  besitzt einen Terrassenpunkt.
- c) Es gilt:  $h(-2) + h'(0) > 0$
- 34 Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Funktionsgleichung  $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$  und der Definitionsmenge  $D_f = [1; \infty[$ . Bestimmen Sie die Wertemenge von  $f$ . (Abitur 2022 Teil 1)
- 35 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen. (Abitur 2022 Teil 1)

$$(e^x - 2)^2 - 4 = 0$$

- 36 Gegeben ist eine Modellfunktion zur Beschreibung der Entwicklung einer Bakterienpopulation im Labor durch  $B: t \mapsto 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Dabei steht die Variable  $t$  für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und  $B(t)$  für die Bakterienanzahl in einer Petrischale. Formulieren Sie eine mögliche Problemstellung im Sinne der vorliegenden Thematik, deren Lösung auf die Gleichung  $0,4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1}$  führt, und lösen Sie die Gleichung nach  $t_1$  auf.

37.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ .

Der Graph der Funktion  $f$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet. (Abitur 2022 AI)

37.1 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion  $f$  sowie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von  $G_f$ . Geben Sie die Wertemenge  $W_f$  an.

37.2 Berechnen Sie die Wendestellen des Graphen von  $f$  und entscheiden Sie begründet, ob es sich dabei um Stellen mit maximaler positiver bzw. maximaler negativer Steigung von  $G_f$  handelt oder nicht.

37.3 Gegeben ist die Funktion  $g: x \mapsto -4x - 2$  mit der Definitionsmenge  $D_g = \mathbb{R}$ . Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade  $G_g$  Tangente an den Graphen  $G_f$  an der Stelle  $x = -2$  ist.

37.4 Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen  $G_f$  für  $-4 \leq x \leq 4$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

38.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ . Der Graph der Funktion  $f$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet. (Abitur 2022 AII)

38.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion  $f$  mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an.

38.2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Funktionsterm  $f(x)$  auch in der Form

$$f(x) = -\frac{1}{100}(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x)$$
 darstellen lässt.

38.3 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von  $G_f$ . Geben Sie die Wertemenge  $W_f$  an.

$$\text{(mögliches Teilergebnis: } f'(x) = -\frac{1}{25}(x-3)(x-10)(x-20) \text{)}$$

38.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen  $G_f$  für  $0 \leq x \leq 24$  in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

39.0 Während das Bundesamt für Naturschutz seit 20 Jahren die Ausbreitung von Wölfen in Deutschland fördert, fordern u.a. Weidetierhalter und Jäger zunehmend eine Aufhebung des Abschussverbots von Wölfen. Um über die eventuelle Aufhebung dieses Verbots zu entscheiden, soll die Entwicklung der Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland modelliert werden. Die Entwicklung seit dem Jahr 2008 lässt sich näherungsweise durch die Funktion  $N$  mit der Funktionsgleichung  $N(t) = N_0 \cdot e^{ct}$  mit  $t, N_0, c \in \mathbb{R}$

und  $t \geq 0, N_0 > 0, c > 0$  darstellen. Der Funktionswert von  $N$  gibt die Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland zum Zeitpunkt  $t$  an. Dabei steht  $t$  für die seit Ende des Jahres 2008 ( $t_0 = 0$ ) vergangene Zeit in Jahren. Ende des Jahres 2013 wurden 18 Wolfsrudel in Deutschland gezählt. Ende 2017 lag die Zahl der Wolfsrudel bereits bei 60. (Abitur 2022 AI)

39.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $N_0$  und  $c$  der Funktion  $N$ . Runden Sie  $N_0$  ganzzahlig und  $c$  auf drei Nachkommastellen.

39.2.0 Im Folgenden gilt  $N(t) = 4 \cdot e^{0,301t}$ .

39.2.1 Das Bundesamt für Naturschutz geht davon aus, dass Deutschland maximal Lebensraum für 440 Rudel bieten kann. Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Wolfsrudel laut dem Modell aus 24.0 voraussichtlich diesen Wert erreicht.

39.2.2 Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $N$  in der Form  $N(t) = N_0 \cdot b^t$  ( $b > 0$ ) an und folgern Sie daraus die prozentuale Zunahme der Anzahl der Wolfsrudel pro Jahr. Runden Sie  $b$  auf drei Nachkommastellen.

40.0 Landwirte beklagen zunehmend Ernteauffälle durch anhaltende Dürren in den Sommermonaten. Während der durchschnittliche Ertrag an Weizen pro Hektar Anbaufläche 2014 noch bei 86,3 Dezitonnen lag, brachte die Ernte von 2017 nur noch durchschnittlich 70,0 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche ein.

Basierend auf den seit dem Jahr 2014 ausgewerteten Daten kann die Ertragsentwicklung vereinfacht durch die Funktion

$E: x \mapsto 56,3 \cdot e^{-ct} + a$  mit  $t \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}^-$  und  $a \in \mathbb{R}^+$  modelliert werden. Der Funktionswert von  $E$  gibt den durchschnittlichen Weizenertrag in Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche zum Zeitpunkt  $t$  an. Dabei steht  $t$  für die vergangene Zeit in Jahren ab dem Jahr 2014 ( $t_0 = 0$ ). Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2022 AII)

40.1 Ermitteln Sie den Mittelwert der jährlichen Abnahme des durchschnittlichen Weizenertrags pro Hektar Anbaufläche über die Jahre 2014 bis 2017.

40.2 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $a$  und  $c$  der Funktion  $E$ . Runden Sie  $c$  auf zwei Nachkommastellen.

40.3.0 Im Folgenden gilt:  $E(t) = 56,3 \cdot e^{-0,11t} + 30$

40.3.1 Einige Landwirte sind der Meinung, dass der Weizenanbau ab einem durchschnittlichen Weizenertrag von 50 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche nicht mehr rentabel für die ist. Berechnen Sie, ab welchem Jahr dies laut dem Modell der Fall wäre.

40.3.2 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von E für  $t \rightarrow \infty$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

40.3.3 Sofern Landwirte 2018 mit einem massiven Einbruch ihrer Weizenerträge konfrontiert waren, hatten sie Anspruch auf Unterstützungszahlungen des Bundes. War ihr durchschnittlicher Weizenertrag pro Hektar Anbaufläche um mehr als 30 % geringer als der Mittelwert der entsprechenden Erträge in den Jahren 2015, 2016 und 2017, so konnten sie einen Antrag auf Nothilfen stellen.  
Prüfen Sie rechnerisch, ob sich gemäß dem hier gewählten mathematischen Modell eine Antragsberechtigung für Nothilfen ergibt.

41.0 Gegeben ist die Funktion  $g: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$  mit der Definitionsmenge  $D_g = [-3; 3]$ .

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_g$  bezeichnet.

(Abitur 2023 Teil 1)

41.1 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

41.2 Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion g.

42.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit

$g(x) = -0,025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80)$  und der Definitionsmenge  $D_g = [0; 7]$ . Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_g$  bezeichnet.

(Abitur 2023 All)

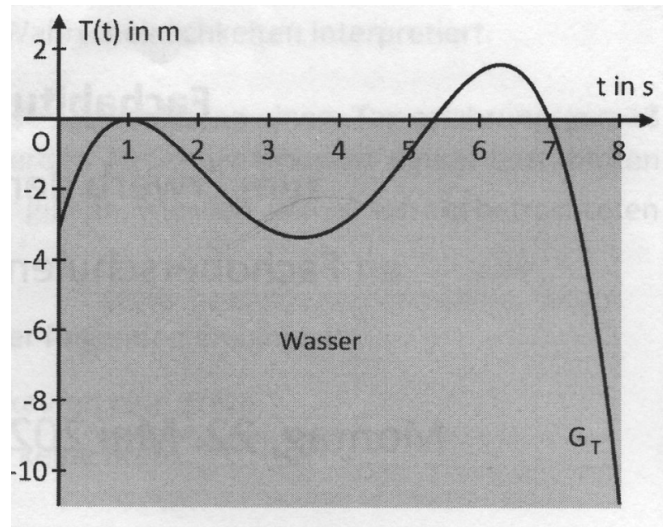
42.1 Bestimmen Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von  $G_g$  und geben Sie die Wertemenge  $W_g$  von g an.

42.2 Zeichnen Sie den Graphen  $G_g$  unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für  $0 \leq x \leq 7$  in ein Koordinatensystem.  
Maßstab für die x-Achse: 1 LE = 1 cm, für die y-Achse: 1 LE = 2 cm

42.3 Der Graph  $G_g$  der Funktion g mit  $g(x) = -0,025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80)$  mit  $D_g = \mathbb{R}$ , die x-Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen  $x = 2$  und  $x = 6$  schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. (Abitur 2023 All)

43.0 Das Auf- und Abtauchverhalten eines Delfins im Meer wird mittels eines an ihm angebrachten Sensors untersucht. Die momentane Höhe des Sensors in Metern bezogen auf die Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Sekunden lässt sich annähernd durch die Funktionswerte der Funktion  $T$  beschreiben.

Der Graph der Funktion  $T$  wird mit  $G_T$  bezeichnet und ist im Zeitraum von 0 bis 8 Sekunden im nebenstehenden Koordinatensystem abgebildet.



Die Funktion  $T$  ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und zum Zeitpunkt  $t_1 = 1$  befindet sich der Delfin an der Wasseroberfläche. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2023 AI)

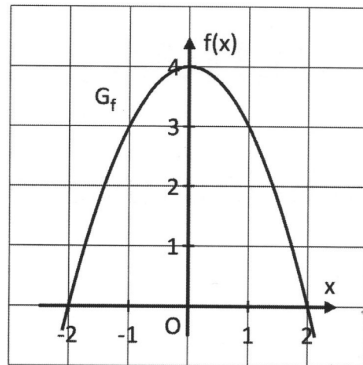
43.1 Beschreiben Sie anhand des Funktionsgraphen  $G_T$  den Bewegungsablauf des Delfins im Bereich von  $t \approx 5,3$  bis  $t = 7$  und erläutern Sie, ob für die Funktion  $T$  das Intervall  $[0; \infty[$  für den beschriebenen Sachverhalt eine sinnvolle Definitionsmenge ist.

43.2 Der Leitkoeffizient im Funktionsterm von  $T$  ist gegeben durch  $a = -\frac{1}{12}$ . Zudem ist

bekannt, dass  $G_T$  den Schnittpunkt  $S\left(0 \mid -\frac{28}{9}\right)$  mit der Ordinatenachse besitzt.

Die zwei ganzzahligen Nullstellen von  $T$  können der Zeichnung entnommen werden. Berechnen Sie den exakten Wert der fehlenden Nullstelle von  $T$ .

44.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen  $G_f$  einer ganzrationalen Funktion  $f$  zweiten Grades mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ . (Abitur 2023 Teil 1)



44.1 Der Graph der Funktion  $f$  und die  $x$ -Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks.

44.2 Die Funktion  $F$  mit der Definitionsmenge  $D_F = \mathbb{R}$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .

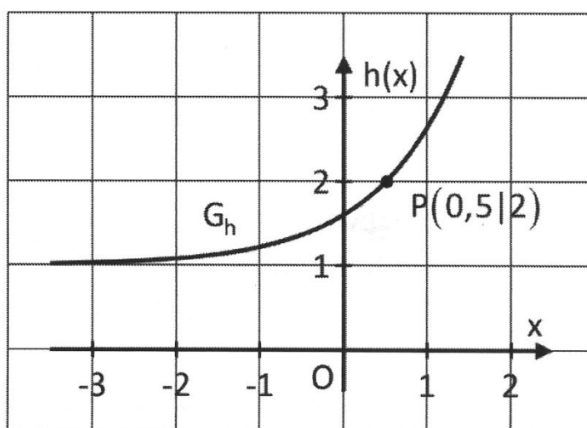
Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_F$  bezeichnet.

Beschreiben Sie den Globalverlauf des Graphen  $G_F$  mit Worten. Gehen Sie auch auf das Monotonieverhalten, die Lage und die Art der Extremstellen sowie auf die Lage der Wendestelle von  $F$  ein.

45.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen  $G_h$  einer

Exponentialfunktion  $h$  mit der Definitionsmenge  $D_h = \mathbb{R}$ . Der zugehörige

Funktionsterm besitzt die Form  $h(x) = e^{x+d} + y_0$  mit  $d, y_0 \in \mathbb{R}$ . (Abitur 2023 Teil 1)



45.1 Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung nachvollziehbar die Werte der Parameter  $d$  und  $y_0$ .

45.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen der Funktion  $h$ , ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen dazu in der Abbildung unter 45.0.

$$\int_{-1}^1 (2 - h(x)) dx > 0$$

46.0 Ein zu Beginn (Zeitpunkt  $t_0 = 0$ )  $0,5 \text{ m}^2$  großer Algent Teppich, der sich am Boden des Beckens mit der Grundfläche  $A_0 = 188,69 \text{ m}^2$  gebildet hat, verdoppelt seine Fläche täglich. (Abitur 2023 AI)

46.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion  $A: t \mapsto A(t)$  auf, welche die Fläche des Algent Teppichs in Quadratmetern in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Tagen angibt. Für die Definitionsmenge der Funktion  $A$  gilt  $D_A = [0; 8]$ .

46.2 Zeigen Sie, dass sich die Wachstumsfunktion  $A$  näherungsweise durch die Funktionsgleichung  $\tilde{A}(t) = 0,5 \cdot e^{0,6931t}$  mit  $D_{\tilde{A}} = D_A$  darstellen lässt und berechnen Sie damit, nach wie vielen Tagen zwei Drittel der gesamten Grundfläche des Beckens von Algen bedeckt wären, wenn nicht eingegriffen würde. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Tage.

47.0 Beim Aufladen des Akkus eines Smartphones fließt ein Ladestrom von 2000 Milliampere. Sobald der Akku optimal geladen ist, verringert das Ladegerät den Ladestrom, um eine Überladung zu vermeiden.

Die Funktion  $I$  mit  $I(t) = 2000 \cdot 0,5^{\frac{t}{488}}$  und  $t \in D_I \subset \mathbb{R}$  modelliert den Verlauf des Ladestroms ab dem Erreichen der optimalen Akkuladung zur Zeit  $t = 0$  bis zur endgültigen Abschaltung des Ladegeräts zur Zeit  $t_{\text{end}} > 0$ . Die Funktionswerte von  $I$  entsprechen der Stärke des Ladestroms in Milliampere und  $t$  entspricht der Zeit in Minuten. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2023 AII)

47.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm näherungsweise auch in der Form

$$\tilde{I}(t) = 2000 \cdot e^{-0,142t}$$

47.2 Das Ladegerät schaltet sich komplett ab, wenn die Ladestromstärke auf 100 Milliampere abgesunken ist. Ermitteln Sie  $t_{\text{end}}$  unter Verwendung des Funktionsterms aus 27.1. Runden Sie das Ergebnis auf ganze Minuten und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für  $\tilde{I}$  an.



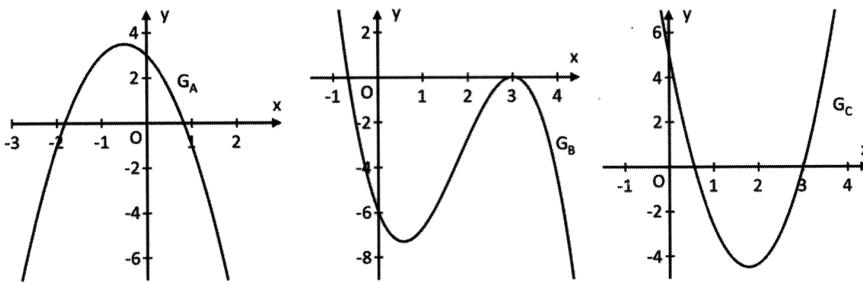
48.0 Gegeben ist die Funktion  $k: x \mapsto 0,5(x-3)^2 \left(2x + \frac{4}{3}\right)$  mit der Definitionsmenge  $D_k = \mathbb{R}$ .

(Abitur 2024 Teil 1)

48.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion  $k$  mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an und bestimmen Sie damit ein Intervall, in dem die  $x$ -Koordinate des lokalen Hochpunkts des Graphen der Funktion  $k$  liegt.

48.2 In der nachfolgenden Abbildung sind die Ausschnitte der Graphen  $G_A, G_B$  und  $G_C$  von in ganz  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen dargestellt.

Entscheiden Sie begründet, welcher der drei Graphen  $G_A, G_B$  bzw.  $G_C$  zur Ableitungsfunktion von  $k$  gehört.



49.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2$  mit der Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R}$ .

Der Graph der Funktion  $f$  in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit  $G_f$  bezeichnet. (Abitur 2024 AI)

49.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$ .

49.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Punkte, in denen  $G_f$  eine waagrechte Tangente besitzt.

49.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen  $G_f$  für  $-3 \leq x \leq 1$  in ein kartesisches Koordinatensystem.  
 Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

50.0 Die Funktion  $f$  lässt sich auch in der Form  $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$  mit  $D_f = \mathbb{R}$  darstellen. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich. (Abitur 2024 All)

50.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente  $G_g$  an  $G_f$  im Punkt  $P(0|2)$ .

50.2 Zeigen Sie, dass in keinem Punkt des Graphen  $G_f$  eine Tangente mit der Steigung  $m = -2$  angelegt werden kann.

50.3 Ermitteln Sie die exakten Koordinaten des Wendepunkts von  $G_f$ .

51.0 Gegeben sind die Funktionen  $g$  und  $h$  durch die Funktionsgleichungen  $g(x) = 2 \cdot e^x - 1$  und  $h(x) = e^{2x}$  mit den Definitionsmengen  $D_g = D_h = \mathbb{R}$ . (Abitur 2024 Teil 1)

51.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des einzigen gemeinsamen Punktes  $P$  der Graphen der beiden Funktionen  $g$  und  $h$ .

51.2 Der Graph der Funktion  $g$  wird an der  $x$ -Achse gespiegelt und anschließend um zwei Einheiten entlang der  $y$ -Achse nach oben verschoben. Der daraus entstandene neue Funktionsgraph gehört zur Funktion  $j$ .  
Geben Sie einen Funktionsterm der Funktion  $j$  an.

52.0 In sogenannten Aluminiumhütten wird nach einem bestimmten Verfahren Aluminium aus Aluminiumoxid gewonnen. Die Temperatur vom Ausgangsstoff bis zum fertigen Endprodukt Aluminium während des Herstellungsprozesses kann modellhaft durch die Funktion  $T$  mit der Funktionsgleichung  $T(t) = 250 \cdot t \cdot e^{-0,1t} + 22$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  beschrieben werden. Dabei steht die Variable  $t$  für die Zeit in Minuten ab dem Zeitpunkt  $t_0 = 0$ .  
Der Funktionswert von  $T$  gibt die Temperatur in Grad Celsius zum Zeitpunkt  $t$  an.  
Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet.  
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2024 AI)

52.1 Berechnen Sie die Temperatur im Herstellungsprozess nach fünf Minuten und die Temperatur, welche sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt.

52.2 Beim Erreichen des Temperaturmaximums liegt Aluminium in flüssiger Form vor.  
Es wird mittels eines Saugrohrs abgesaugt und kühlt anschließend ab.  
Ermitteln Sie rechnerisch dieses Temperaturmaximum.

(mögliches Teilergebnis:  $\dot{T}(t) = 250 \cdot e^{-0,1t} - 25 \cdot t \cdot e^{-0,1t}$ )

52.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion  $T$  im Bereich  $0 \leq t \leq 60$  in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. Entnehmen Sie anschließend dem Graphen den Zeitpunkt  $t_{20\text{-fach}}$ , zu dem die Temperatur im Abkühlvorgang dem 20-fachen der Anfangstemperatur entspricht.

52.4 Für die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion  $T$  gilt ohne Nachweis  $W(20|T(20))$ . Berechnen Sie  $\dot{T}(20)$  und interpretieren Sie den Wert im Sinne der vorliegenden Thematik.

53.0 Beim Backen eines Roggenbrottes kann Sauerteig als Triebmittel für den Brotteig verwendet werden. Für den Sauerteig setzt man Mahl und Wasser im selben Verhältnis zueinander an. Milchsäurebakterien in Mehl und Wasser sorgen dafür, dass im Gemisch die notwendige Milchsäure entsteht.

Ein frisch angesetzter Sauerteig besitzt zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  einen pH-Wert (Säuregrad) von 6,0. Nach 40 Stunden hat der Sauerteig einen pH-Wert von 3,5.

Das Durchsäuern des Gemisches lässt sich näherungsweise durch die Funktion  $p$  mit der Funktionsgleichung  $p(t) = 3,2 + b \cdot e^{-kt}$  mit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  und  $b, k \in \mathbb{R}$  beschreiben.

Dabei steht die Variable  $t$  für die Zeit in Stunden ab dem Zeitpunkt  $t_0 = 0$ .

Der Funktionswert von  $p$  gibt den pH-Wert zum Zeitpunkt  $t$  an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet.

Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2024 All)

53.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $b$  und  $k$ .

53.2.0 Im Folgenden gilt  $p(t) = 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056t}$ .

53.2.1 Der Sauerteig kann ab einem pH-Wert von 4,0 dem Brotteig zugegeben werden. Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, ab welchem die Zugabe des Sauerteigs möglich ist. Berechnen Sie die Abnahmegeschwindigkeit des pH-Wertes zu diesem

Zeitpunkt. (mögliches Teilergebnis:  $\dot{p}(t) = -0,1568 \cdot e^{-0,056t}$ )

53.2.2 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion  $p$  im Bereich  $0 \leq t \leq 60$  in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.